

TÍNH LIÊN TỤC HAUSDORFF CỦA ÁNH XẠ NGHIỆM HỮU HIỆU YẾU CHO BÀI TOÁN TỐI ƯU TẬP CÓ CHỨA THAM SỐ

Phạm Trần Anh Thư
Trường THPT FPT Cần Thơ
(Email: thupta9@fpt.edu.vn)

Ngày nhận: 25/8/2024

Ngày phản biện: 14/9/2024

Ngày duyệt đăng: 15/11/2024

TÓM TẮT

Mục tiêu nhằm nghiên cứu tính liên tục của ánh xạ nghiệm hữu hiệu của bài toán tối ưu tập bị nhiễu trong không gian định chuẩn. Các khái niệm về tính nửa liên tục, liên tục và các khái niệm liên quan đến tính lồi của một ánh xạ đa trị như tính C -lồi theo đoạn, tính C -tựa lồi tự nhiên theo đoạn, tính C -lồi theo cung, tính C -tựa lồi tự nhiên theo cung được thảo luận. Tiếp theo các hàm vô hướng mở rộng của hàm Gerterwitz và các tính chất của chúng được xem xét, trong đó tính liên tục đóng một vai trò quan trọng trong nghiên cứu. Dựa vào các tính chất của các hàm vô hướng trên, một biểu diễn vô hướng của nghiệm cho bài toán tối ưu tập được xây dựng. Cuối cùng, sử dụng các tính chất của hàm vô hướng này cùng với tính compact của tập ràng buộc và các giả thiết về tính C -liên tục cũng như tính C -tựa lồi tự nhiên theo cung trên hàm mục tiêu, chúng tôi đã thiết lập các điều kiện đủ cho tính liên tục của ánh xạ nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán đã nêu ra.

Từ khóa: Bài toán tối ưu tập, biểu diễn vô hướng, liên tục Hausdorff, nghiệm xấp xỉ, vô hướng hóa.

Trích dẫn: Phạm Trần Anh Thư, 2024. Tính liên tục Hausdorff của ánh xạ nghiệm hữu hiệu yếu cho bài toán tối ưu tập có chứa tham số. Tạp chí Nghiên cứu khoa học và Phát triển kinh tế Trường Đại học Tây Đô. 21: 97-108.

*ThS. Phạm Trần Anh Thư - Giảng viên Trường Trung học phổ thông FPT Cần Thơ

1. GIỚI THIỆU

Tối ưu hóa với hàm mục tiêu đa trị đã được công nhận là một chủ đề quan trọng và tích hợp cho nhiều bài toán trong tối ưu hóa, chẳng hạn như bất đẳng thức biến phân vector, bài toán tối ưu hóa vector, bài toán tối ưu hóa mờ, các bài toán tối ưu về lĩnh vực kinh tế, y học, kỹ thuật,...bao hàm thức biến phân (Khan et al., 2016). Đối với chủ đề này, chúng ta thường tiếp cận thông qua một trong ba tiêu chuẩn phổ biến sau: tiêu chuẩn vector (Luc, 1989), tiêu chuẩn tập hợp (Kuroiwa, 1997; Jahn and Ha, 2011) và tiêu chuẩn giàn lattice (Lohne, 2011). Đối với tiêu chuẩn tập hợp, theo Kreps (1979) trích dẫn một ví dụ đơn giản thông qua việc so sánh hai thực đơn thuộc hai nhà hàng $\mathcal{A}$ và $\mathcal{B}$. Quan hệ thứ tự “ $\preceq$ ” cho biết sở thích của thực khách về bữa ăn. Từ nghiên cứu của Kreps (1979), mối quan hệ giữa hai thực đơn $\mathcal{A}$ và $\mathcal{B}$ có thể được viết lại như sau:

$$\forall a \in \mathcal{A}, \exists b \in \mathcal{B}: a \preceq b, \quad (1)$$

nghĩa là, với mỗi món ăn trên thực đơn $\mathcal{A}$, ta luôn tìm được một món ăn trên thực đơn $\mathcal{B}$ làm cho thực khách thích hơn. Một quan hệ thứ tự khác là

$$\forall b \in \mathcal{B}, \exists a \in \mathcal{A}: a \preceq b, \quad (2)$$

nghĩa là, với mỗi món ăn trong thực đơn $\mathcal{B}$, ta luôn tìm được một món ăn trên thực đơn $\mathcal{A}$ mà thực khách ít thích hơn. Dựa vào ý nghĩa của (1) và (2), chúng tương ứng với quan hệ thứ tự trên và quan hệ thứ tự dưới đã được giới thiệu bởi Kuroiwa (1997).

Phân tích tính ổn định cho các bài toán tối ưu tập là một chủ đề quan trọng nhận

được sự quan tâm đặc biệt của các nhà toán học. Hai cách tiếp cận chính đã xuất hiện để giải quyết cho chủ đề này. Cách tiếp cận đầu tiên liên quan đến việc nghiên cứu một bài toán khi nó bị xáo trộn bởi một dãy các bài toán nhiều cho cả tập khả thi và hàm mục tiêu hội tụ đến bài toán đang xem xét. Trong trường hợp này, sự ổn định đạt được khi dãy tập nghiệm của các bài toán nhiều hội tụ về tập nghiệm của bài toán ban đầu. Loại ổn định này được gọi là điều kiện hội tụ của các bài toán nhiều đối với bài toán ban đầu (Gutiérrez et al., 2016; Karuna and Lalitha, 2019; Anh et al., 2020). Cách tiếp cận thứ hai giải quyết các vấn đề bị nhiễu bởi các tham số trong không gian tham số và trọng tâm của cách tiếp cận này thường là thiết lập tính ổn định theo nghĩa liên tục, liên tục Hölder/Lipschitz hoặc tính khả vi của các ánh xạ nghiệm. Bây giờ, chúng tôi cung cấp một cái nhìn tổng quan ngắn gọn về các công trình đã nghiên cứu tính liên tục của ánh xạ nghiệm cho các bài toán tối ưu tập chứa tham số. Trong một số công trình nghiên cứu trước đó của Xu and Li (2014) đã giới thiệu thuộc tính trên và thuộc tính trên ngược, đồng thời sử dụng chúng để thiết lập tính liên tục của ánh xạ nghiệm hữu hiệu cho các bài toán tối ưu tập chứa tham số liên quan đến quan hệ thứ tự trên. Thật không may, những tính chất này khá mạnh và không dễ dàng áp dụng trong nhiều tình huống thực tế. Trong công trình tiếp theo của Khoshkhabar et al., (2017), các tác giả đã thay thế các tính chất mạnh này bằng tính tựa lồi chặt của hàm mục tiêu để đạt được kết luận tương tự như kết luận của (Xu and Li, 2014). Các kết quả của Xu and Li (2016) được

mở rộng và cải tiến sau này bằng cách thay thế các điều kiện liên tục của ánh xạ mục tiêu bằng các điều kiện liên tục theo nón có thứ tự trong Khoshkhabar (2018). Sau đó, trong nghiên cứu của Mao et al., (2019), các thuộc tính liên tục theo nón này được áp dụng để nghiên cứu các thuộc tính nửa liên tục của ánh xạ nghiệm hữu hiệu cho các bài toán tối ưu tập chứa tham số thông qua các tập cải tiến. Gần đây, các công trình của Sun (2020) và Liu et al., (2021) đã sử dụng các thuộc tính đơn điệu để nghiên cứu tính liên tục của ánh xạ nghiệm cho các bài toán tối ưu tập chứa tham số không lồi liên quan đến các quan hệ thứ tự trên và dưới, cũng như quan hệ Minkowski. Các tác giả trong (Wenyan and Guolin, 2022) đã sử dụng các thuộc tính được đưa ra trong (Xu and Li, 2014) để thiết lập tính liên tục của ánh xạ nghiệm xấp xỉ yếu cho các bài toán tối ưu tập chứa tham số.

Vô hướng hóa là một cách tiếp cận hiệu quả để nghiên cứu các bài toán tối ưu tập. Từ các công trình đã có, có hai phương pháp vô hướng chính là vô hướng tuyến tính và phi tuyến. Trong Han et al., (2019) và Han (2020), các tác giả đã áp dụng các hàm vô hướng tuyến tính và các điều kiện lồi để xem xét tính chất liên thông cho các tập nghiệm hữu hiệu và hữu hiệu yếu của bài toán tối ưu tập. Đối với các bài toán không lồi, các nghiệm hữu hiệu thường không thể được xác định bằng các hàm tuyến tính. Do đó, một số hàm vô hướng phi tuyến đã được đề xuất trong nhiều tài liệu. Hầu hết chúng đều dựa trên hàm khoảng cách định hướng của Hiriart-Urruty, hàm Gerstewitz hoặc các dạng mở rộng của chúng. Gần đây,

(Huerga et al., 2021; Jiménez et al., 2020) đã đề xuất sáu hàm vô hướng, mở rộng hàm khoảng cách định hướng của Hiriart - Urruty và sử dụng chúng để thảo luận về các điều kiện tối ưu cho sáu bài toán tối ưu tập tương ứng với sáu loại quan hệ thứ tự tập được giới thiệu trong Kuroiwa (1997). Trong Khoshkhabar (2022), tác giả đã sử dụng hai hàm Gerstewitz mở rộng được đề xuất trong (Khoshkhabar and Khorram, 2016) để cung cấp các điều kiện tối ưu cho các nghiệm hữu hiệu yếu gần đúng cho các bài toán tối ưu tập.

Được thúc đẩy bởi dòng ý tưởng này, mục đích của nghiên cứu là khảo sát các điều kiện liên tục Hausdorff cho các bài toán tối ưu tập tham số liên quan đến các giả thiết về tính không đơn điệu và không lồi của hàm mục tiêu và tập ràng buộc. Đóng góp của bài báo có thể cung cấp một biểu diễn vô hướng của nghiệm hữu hiệu xấp xỉ yếu cho bài toán tối ưu tập chứa tham số. Đóng góp khác là xây dựng các điều kiện đủ cho tính liên tục Hausdorff của các ánh xạ nghiệm này mà không giả sử tính đơn điệu, tính lồi và tính chất ngược như trong các công trình đã có.

2. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Cho X, Y là các không gian định chuẩn, C là nón lồi đóng, có đỉnh, có phần trong khác rỗng trong Y . Tập hợp tất cả các tập con khác rỗng của X và Y lần lượt được kí hiệu bởi $\mathbf{P}(X)$ và $\mathbf{P}(Y)$. Một tập $\mathcal{A} \in \mathbf{P}(Y)$ được gọi là C -chính thường nếu $\mathcal{A} + C \neq Y$, C -đóng nếu $\mathcal{A} + C$ là đóng, C -lồi nếu $\mathcal{A} + C$ là lồi. Để cho ngắn gọn, chúng tôi ký hiệu họ các tập C -chính thường và C -đóng lần lượt là

$\mathbf{P}_{\text{pro } C}(\mathbb{Y})$ và $\mathbf{P}_{\text{cl } C}(\mathbb{Y})$. Với mỗi cặp điểm $x_1, x_2 \in \mathbb{X}$, $\mathcal{L}_{x_1, x_2}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{X}$ được định nghĩa:

$$\mathcal{L}_{x_1, x_2}(t) = (1 - t)x_1 + tx_2 \quad \forall t \in [0, 1].$$

Khi đó, $\mathcal{L}_{x_1, x_2}([0, 1])$ được gọi là một đoạn với hai đầu mút x_1, x_2 . Với mỗi cặp điểm $x_1, x_2 \in \mathbb{X}$, $\Gamma_{x_1, x_2}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{X}$ là một ánh xạ liên tục thoả mãn:

$$\Gamma_{x_1, x_2}(0) = x_1 \text{ và } \Gamma_{x_1, x_2}(1) = x_2.$$

Khi đó, $\Gamma_{x_1, x_2}([0, 1])$ được gọi là một cung trên $\mathbb{X}$ với hai đầu mút x_1, x_2 . Để đơn giản trong cách trình bày, trong phần tiếp theo, chúng tôi ký hiệu đoạn thẳng và cung trên $\mathbb{X}$ với hai đầu mút x_1, x_2 lần lượt là $\mathcal{L}_{x_1, x_2}$ và Γ_{x_1, x_2} . Bây giờ chúng ta nhắc lại các khái niệm đóng vai trò quan trọng trong kết quả bên dưới.

Định nghĩa 2.1 (Kuroiwa, 1997) Cho $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathbf{P}(\mathbb{Y})$, các quan hệ thứ tự trong $\mathbb{Y}$ tương ứng với nón C được định nghĩa:

$$\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}: \Leftrightarrow \mathcal{B} \subset \mathcal{A} + C;$$

$$\mathcal{A} < \mathcal{B}: \Leftrightarrow \mathcal{B} \subset \mathcal{A} + \text{int}C.$$

Định nghĩa 2.2 (Gopfert et al., 2003) Một ánh xạ đa trị $F: \mathbb{X} \rightrightarrows \mathbb{Y}$ được gọi là:

(a) *nửa liên tục trên* (usc) tại $x_0 \in \mathbb{X}$ nếu với một lân cận tùy ý $\mathcal{V}$ của $F(x_0)$, ta luôn tìm được một lân cận $\mathcal{U}$ của x_0 sao cho $F(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$;

(b) *nửa liên tục dưới* (lsc) tại $x_0 \in \mathbb{X}$ nếu với một tập mở tùy ý $\mathcal{V}$ trong $\mathbb{Y}$ với $F(x_0) \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$, ta luôn tìm được một lân cận $\mathcal{U}$ của x_0 thoả mãn

$$F(x) \cap \mathcal{V} \neq \emptyset \quad \forall x \in \mathcal{U};$$

(c) *liên tục* tại $x_0 \in \mathbb{X}$ nếu nó là usc và lsc tại x_0 ;

(d) *nửa liên tục Hausdorff trên* (Husc) tại $x_0 \in \mathbb{X}$ nếu với mỗi lân cận $\mathcal{V}$ của gốc trong $\mathbb{Y}$, ta tìm được một lân cận $\mathcal{U}$ của x_0 thoả mãn:

$$F(x) \subset F(x_0) + \mathcal{V} \quad \forall x \in \mathcal{U};$$

(e) *nửa liên tục Hausdorff dưới* (Hlsc) tại $x_0 \in \mathbb{X}$ nếu với mỗi lân cận $\mathcal{V}$ của gốc trong $\mathbb{Y}$, ta tìm được một lân cận $\mathcal{U}$ của x_0 thoả mãn:

$$F(x_0) \subset F(x) + \mathcal{V} \quad \forall x \in \mathcal{U};$$

(f) *liên tục Hausdorff* tại $x_0 \in \mathbb{X}$ nếu nó là Husc và Hlsc tại x_0 ;

(g) *C-nửa liên tục trên* (C -usc) tại $x_0 \in \mathbb{X}$ nếu với mỗi lân cận $\mathcal{V}$ của gốc trong $\mathbb{Y}$, ta tìm được một lân cận $\mathcal{U}$ của x_0 thoả mãn:

$$F(x) \subset F(x_0) + \mathcal{V} + C \quad \forall x \in \mathcal{U};$$

(h) *C-nửa liên tục dưới* (C -lsc) tại $x_0 \in \mathbb{X}$ nếu với mỗi lân cận $\mathcal{V}$ của gốc trong $\mathbb{Y}$, ta tìm được một lân cận $\mathcal{U}$ của x_0 thoả mãn:

$$F(x_0) \subset F(x) + \mathcal{V} + C \quad \forall x \in \mathcal{U};$$

(i) *C-liên tục* tại $x_0 \in \mathbb{X}$ nếu nó là C -usc và C -lsc tại x_0 .

Định nghĩa 2.3 Một tập $\mathcal{D} \in \mathbf{P}(\mathbb{X})$ được gọi là:

(a) *lồi* nếu với mọi $x, z \in \mathcal{D}$, $\mathcal{L}_{x, z} \subset \mathcal{D}$.

(b) (Avriel and Zang, 1980) *liên thông cung* nếu với mỗi cặp điểm $x, z \in \mathcal{D}$, ta tìm được một cung $\Gamma_{x, z} \subset \mathcal{D}$.

Lấy ý tưởng từ Anh et al., (2022), chúng tôi xem xét khái niệm lồi tổng quát của ánh xạ đa trị như sau:

Định nghĩa 2.4 Với $\mathcal{D} \in \mathbf{P}(\mathbb{X})$, một ánh xạ đa trị $F: \mathbb{X} \rightrightarrows \mathbb{Y}$ được gọi là

(a) *C-lồi theo đoạn* trong $\mathcal{D}$ nếu $\mathcal{L}_{x_1, x_2} \subset \mathcal{D}$ và

$$F(\mathcal{L}_{x_1, x_2}(t)) \leq (1-t)F(x_1) + tF(x_2) + \forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}, t \in [0,1];$$

(b) *C-lồi theo cung liên thông* trong $\mathcal{D}$ nếu với mỗi cặp điểm $x_1, x_2 \in \mathcal{D}$, ta tìm được một cung Γ_{x_1, x_2} trong $\mathcal{D}$ thỏa mãn

$$F(\Gamma_{x_1, x_2}(t)) \leq (1-t)F(x_1) + tF(x_2) \forall t \in [0,1];$$

(c) *C-tựa lồi tự nhiên theo đoạn* trong $\mathcal{D}$ nếu với mọi $x_1, x_2 \in \mathcal{D}, \mathcal{L}_{x_1, x_2} \subset \mathcal{D}$, và $t \in [0,1]$, ta tìm được $s \in [0,1]$ sao cho

$$F(\mathcal{L}_{x_1, x_2}(t)) \leq (1-s)F(x_1) + sF(x_2);$$

(d) *C-tựa lồi tự nhiên theo cung* trong $\mathcal{D}$ nếu với mỗi cặp điểm $x_1, x_2 \in \mathcal{D}$, ta tìm được một cung Γ_{x_1, x_2} trong $\mathcal{D}$, và với mỗi $t \in [0,1]$, ta tìm được $s \in [0,1]$ thỏa mãn:

$$F(\Gamma_{x_1, x_2}(t)) \leq (1-s)F(x_1) + sF(x_2).$$

Định nghĩa 2.5 (Anh et al., 2023) Cho e là một phần tử trong $\text{int } C$. Một hàm $\mathcal{T}_e: \mathbf{P}(\mathbb{Y}) \times \mathbf{P}(\mathbb{Y}) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ được định nghĩa bởi:

$$\mathcal{T}_e(\mathcal{A}, \mathcal{B}) := \inf\{\lambda \in \mathbb{R}: \mathcal{A} \leq \lambda e + \mathcal{B}\} \forall \mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathbf{P}(\mathbb{Y}).$$

Bổ đề 2.1 (Anh et al., 2023) Với $\mathcal{A}, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{B} \in \mathbf{P}(\mathbb{Y})$, ta được các khẳng định sau

(a) Với mọi $\mu \in \mathbb{R}, \mathcal{T}_e(\mathcal{A} + \mu e, \mathcal{B}) = \mathcal{T}_e(\mathcal{A}, \mathcal{B}) + \mu$.

(b) Nếu $\mathcal{A} \in \mathbf{P}_{clC}(\mathbb{Y}), \mathcal{T}_e(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \in \mathbb{R}$ thì $\mathcal{A} \leq \mathcal{T}_e(\mathcal{A}, \mathcal{B})e + \mathcal{B}$.

(c) Nếu $\mathcal{A}_1 \leq \mathcal{A}_2$ thì $\mathcal{T}_e(\mathcal{A}_1, \mathcal{B}) \leq \mathcal{T}_e(\mathcal{A}_2, \mathcal{B})$.

(d) Nếu $\mathcal{A}_1 < \mathcal{A}_2$ thì $\mathcal{T}_e(\mathcal{A}_1, \mathcal{B}) < \mathcal{T}_e(\mathcal{A}_2, \mathcal{B})$.

Với $F: \mathbb{X} \rightrightarrows \mathbb{Y}$, ta xét hàm $\psi: \mathbb{X} \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ được định nghĩa bởi:

$$\psi(x, z) = \mathcal{T}_e(F(x), F(z)) \forall x, z \in \mathbb{X}.$$

Bổ đề 2.2 Nếu $F: \mathbb{X} \rightrightarrows \mathbf{P}_{proC}(\mathbb{Y})$ là C -liên tục với giá trị C -compact trong một tập con khác rỗng $\mathcal{D}$ của $\mathbb{X}$ thì ψ là liên tục trong $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$.

Chứng minh

Đầu tiên ta cần chứng minh ψ là nửa liên tục dưới $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$. Ta thấy rằng với mọi $r \in \mathbb{R}$, tập $\mathcal{L}_r = \{(x, z) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D} | \psi(x, z) \leq r\}$ là đóng. Thật vậy, với mỗi $\{(x_n, z_n)\} \subset \mathcal{L}_r$ hội tụ về (x_0, z_0) , ta cần chứng minh rằng $(x_0, z_0) \in \mathcal{L}_r$, nghĩa là:

$$re + F(z_0) \subset F(x_0) + C$$

Lấy $\mathcal{V}$ là một lân cận của gốc bất kì trong $\mathbb{Y}$, khi đó tồn tại một lân cận $\mathcal{V}_1$ sao cho:

$$\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}.$$

Vì F là C -liên tục Hausdorff trên $\mathcal{D}$, nên với n đủ lớn ta có:

$$F(z_0) \subset F(z_n) + \mathcal{V}_1 + C \text{ và } F(x_n) \subset F(x_0) + \mathcal{V}_1 + C.$$

Kết hợp với điều kiện $(x_n, z_n) \in \mathcal{L}_r$, nghĩa là, $re + F(z_n) \subset F(x_n) + C$, ta được:

$$\begin{aligned} re + F(z_0) &\subset re + F(z_n) + \mathcal{V}_1 + C \\ &\subset F(x_n) + \mathcal{V}_1 + C \\ &\subset F(x_0) + \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_1 + C \\ &\subset F(x_0) + \mathcal{V} + C. \end{aligned}$$

Vì $F(z_0)$ là C -đóng và $\mathcal{V}$ bất kì, ta được: $re + F(z_0) \subset F(x_0) + C$.

Vì vậy, $F(x_0) \leq re + F(z_0)$. Vậy $\mathcal{L}_r$ đóng với mọi $r \in \mathbb{R}$.

Đôi với tính nửa liên tục trên của ψ , ta chỉ ra rằng tập:

$\mathcal{U}_r = \{(x, z) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D} | \psi(x, z) \geq r\}$ đóng với mọi $r \in \mathbb{R}$.

Giả sử tồn tại một số thực $\bar{r} \in \mathbb{R}$ và dãy $\{(x_n, z_n)\} \in \mathcal{U}_{\bar{r}}$ hội tụ về điểm (x_0, z_0) nhưng $(x_0, z_0) \notin \mathcal{U}_{\bar{r}}$, như vậy $\psi(x_0, z_0) < \bar{r}$.

Tiếp theo, ta thấy tồn tại $\varepsilon > 0$ thỏa mãn:

$$\psi(x_0, z_0) < \bar{r} - 2\varepsilon < \bar{r} - \varepsilon < \bar{r} \leq \psi(x_n, z_n).$$

Vì $\psi(x_0, z_0) < \bar{r} - 2\varepsilon$ và $F(x_0) \in \mathbf{P}_{cl\,C}(\mathbb{Y})$, ta được:

$$(\bar{r} - 2\varepsilon)e + F(z_0) \subset F(x_0) + C.$$

Vì F là C -liên tục Hausdorff trên $\mathcal{D}$, nên với mọi lân cận gốc $\mathcal{V}$ thỏa mãn

$$\mathcal{V} + \mathcal{V} \subset -\varepsilon e + C,$$

Ta tìm được $n_2 > 0$ sao cho với mọi $n > n_2$ thì:

$$F(z_n) \subset F(z_0) + \mathcal{V} + C \text{ và } F(x_0) \subset F(x_n) + \mathcal{V} + C.$$

Khi đó,

$$\begin{aligned} (\bar{r} - 2\varepsilon)e + F(z_n) &\subset (\bar{r} - 2\varepsilon)e + F(z_0) + \mathcal{V} + C \\ &\subset F(x_0) + \mathcal{V} + C \\ &\subset F(x_n) + \mathcal{V} + \mathcal{V} + C. \end{aligned}$$

Kết hợp với $\mathcal{V} + \mathcal{V} \subset -\varepsilon e + C$ ta thu được với mọi $n > n_2$ thì:

$$(\bar{r} - \varepsilon)e + F(z_n) \subset F(x_n) + C.$$

Do đó, $F(x_n) \leq (\bar{r} - \varepsilon)e + F(z_n)$.

Vì vậy $\psi(x_n, z_n) < \bar{r} - \varepsilon < \bar{r}$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết $(x_n, z_n) \in \mathcal{U}_{\bar{r}}$ với mọi n

Lấy ý tưởng từ Anh et al., (2022), ta thu được tính chất sau.

Bổ đề 2.3 Cho $\mathcal{D}$ là một phần tử của $\mathbf{P}(\mathbb{X})$ và $x \in \mathcal{D}$. Nếu $\mathcal{D}$ là liên thông cung và F là C -tựa lồi tự nhiên theo cung liên thông với giá trị $(-C)$ -lồi trong $\mathcal{D}$, thì $\psi(\cdot, x)$ là tựa lồi tự nhiên theo cung liên thông trong $\mathcal{D}$.

3. TÍNH LIÊN TỤC HAUSDORFF CỦA ÁNH XẠ NGHIỆM CHO BÀI TOÁN TỐI ƯU TẬP

Cho $\mathbb{X}, \mathbb{Y}, \mathbf{P}(\mathbb{X}), \mathbf{P}(\mathbb{Y}), C$ và e được xác định như Mục 2. Cho $\mathcal{D} \in \mathbf{P}(\mathbb{X})$ và Λ là một không gian định chuẩn. Xem Han (2022), với mỗi $\varepsilon \geq 0$, một *tựa quan hệ thứ tự dưới xấp xỉ* $<_\varepsilon$ được định nghĩa:

$$\mathcal{A} <_\varepsilon \mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{A} + \varepsilon e \subset \mathcal{B} \quad \forall \mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathbf{P}(\mathbb{Y}).$$

Với mỗi $p \in \Lambda$, chúng tôi xét bài toán tối ưu tập chứa tham số

$$(\text{SOP}): \quad \min F(x, p) \text{ với } x \in \mathcal{D},$$

trong đó $F: \mathbb{X} \times \Lambda \rightrightarrows \mathbf{P}_{pro\,C}(\mathbb{Y})$ là một ánh xạ đa trị có giá trị khác rỗng.

Định nghĩa 3.1 (Han, 2020) Với $(\varepsilon, p) \in \mathbb{R}_+ \times \Lambda, \bar{x} \in \mathcal{D}$ được gọi là *ε -nghiệm hữu hiệu yếu* cho bài toán (SOP), kí hiệu $\bar{x} \in \text{WEff}(\varepsilon, p)$ nếu $x \in \mathcal{D}$ và

$$F(x, p) <_\varepsilon F(\bar{x}, p) \Rightarrow F(\bar{x}, p) <_\varepsilon F(x, p).$$

Sau đây là một đặc trưng của ε -nghiệm hữu hiệu yếu cho bài toán (SOP).

Bổ đề 3.1 Cho $(\varepsilon, p) \in]0, +\infty[\times \Lambda$ và $\bar{x} \in \mathcal{D}$, nếu $F(\bar{x}, p)$ là C -đóng, thì $\bar{x}$ là một ε -nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán (SOP)

khi và chỉ khi không tồn tại $x \in \mathcal{D}$ sao cho $F(x, p) <_\varepsilon F(\bar{x}, p)$.

Chứng minh

Từ Định nghĩa 3.1, ta chỉ cần chứng minh điều kiện đủ. Giả sử rằng ta tìm được một vector $\hat{x} \in \mathcal{D}$ sao cho

$$F(\hat{x}, p) <_\varepsilon F(\bar{x}, p),$$

tức là,

$$F(\bar{x}, p) \subset F(\hat{x}, p) + \varepsilon e + \text{int } C. \quad (3)$$

Vì $\bar{x} \in \text{WEff}(\varepsilon, p)$, nên ta được $F(\bar{x}, p) <_\varepsilon F(\hat{x}, p)$, cụ thể

$$F(\hat{x}, p) \subset F(\bar{x}, p) + \varepsilon e + \text{int } C. \quad (4)$$

Từ bao hàm thức (3) và (4) suy ra

$$\begin{aligned} F(\bar{x}, p) + C &\subset F(\hat{x}, p) + C + \varepsilon e + \text{int } C \\ &\subset F(\bar{x}, p) + \text{int } C + 2\varepsilon e \\ &\subset F(\bar{x}, p) + \text{int } C. \end{aligned}$$

Điều này vô lý vì $F(\bar{x}, p) + C$ là một tập đóng.

Các ánh xạ $\zeta: \mathbb{X} \times \mathbb{X} \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ và $W, E: \mathbb{X} \times]0, +\infty[\times \Lambda \rightrightarrows \mathbb{X}$ được định nghĩa

$$\begin{aligned} \zeta(x, z, p) &:= \mathcal{J}_e(F(x, p), F(z, p)), \\ W(x, \varepsilon, p) &:= \{\bar{x} \in \mathcal{D}: \zeta(\bar{x}, x, p) \leq \zeta(z, x, p) + \varepsilon \forall z \in \mathcal{D}\}, \\ E(x, \varepsilon, p) &:= \{\bar{x} \in \mathcal{D}: \zeta(\bar{x}, x, p) < \zeta(z, x, p) + \varepsilon \forall z \in \mathcal{D}\}, \end{aligned}$$

với mọi $(x, \varepsilon, p) \in \mathcal{D} \times]0, +\infty[\times \Lambda$.

Định lý 3.1 Nếu tất cả các giả thiết của Bổ đề 3.1 thoả mãn thì

$$\text{WEff}(\varepsilon, p) = \bigcup_{x \in \mathcal{D}} W(x, \varepsilon, p) \quad \forall (\varepsilon, p) \in]0, +\infty[\times \Lambda.$$

Chứng minh

Lấy tùy ý $\bar{x} \in \text{WEff}(\varepsilon, p)$, áp dụng Bổ đề 3.1, ta được

$$F(z, p) \nless \varepsilon F(\bar{x}, p) \quad \forall z \in \mathcal{D},$$

tương đương,

$$F(z, p) + \varepsilon e \nless F(\bar{x}, p) \quad \forall z \in \mathcal{D}.$$

Áp dụng Bổ đề 2.1 (a), ta được

$$\begin{aligned} \zeta(z, \bar{x}, p) + \varepsilon &= \mathcal{J}_e(F(z, p) + \varepsilon e, F(\bar{x}, p)) \\ &\geq 0 \geq \zeta(\bar{x}, \bar{x}, p) \quad \forall z \in \mathcal{D}, \end{aligned}$$

và do đó $\bar{x} \in W(\bar{x}, \varepsilon, p) \subset \bigcup_{x \in \mathcal{D}} W(x, \varepsilon, p)$.

Ngược lại, lấy ngẫu nhiên $\bar{x} \in \bigcup_{x \in \mathcal{D}} W(x, \varepsilon, p)$, ta tìm được $x_0 \in \mathcal{D}$ thoả mãn:

$$\zeta(\bar{x}, x_0, p) \leq \zeta(z, x_0, p) + \varepsilon \quad \forall z \in \mathcal{D}. \quad (5)$$

Nếu $\bar{x} \notin \text{WEff}(\varepsilon, p)$, thì ta tìm được $\hat{z} \in \mathcal{D}$ thoả mãn

$$F(\hat{z}, p) + \varepsilon e < F(\bar{x}, p).$$

Từ Bổ đề 2.1 (a) và (c), ta có

$$\begin{aligned} \zeta(\hat{z}, x_0, p) + \varepsilon &= \mathcal{J}_e(F(\hat{z}, p) + \varepsilon e, F(x_0, p)) \\ &< \mathcal{J}_e(F(\bar{x}, p), F(x_0, p)) = \zeta(\bar{x}, x_0, p), \end{aligned}$$

điều này mâu thuẫn với (5).

Vì vậy, $\bar{x} \in \text{WEff}(\varepsilon, p)$ và chứng minh được hoàn thành.

Ví dụ 3.1 Cho $\mathbb{X} = \Lambda = \mathbb{R}, \mathbb{Y} = \mathbb{R}^2, C = \mathbb{R}_+^2, e = (1, 1)$ và $\mathcal{D} = \mathcal{P} = [-2, 2]$. Với $(x, p) \in \mathbb{X} \times \Lambda$, ta xét

$$F(x, p) = (x, |x|) + \mathcal{B}_{\mathbb{Y}},$$

trong đó $\mathcal{B}_{\mathbb{Y}} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2: u^2 + v^2 \leq 1\}$. Khi đó, tất cả các giả thiết của Định lý 3.1 được thoả mãn. Áp dụng Định lý 3.1, ta được

$$\text{WEff}(\varepsilon, p) = \bigcup_{x \in [-2; 2]} W(x, \varepsilon, p) = [-2, \varepsilon] \cap [-2; 2].$$

Nhận xét 3.1 Tầm quan trọng của biểu diễn vô hướng trong việc nghiên cứu các bài toán tối ưu hóa đã được nhấn mạnh trong nhiều ấn phẩm khác nhau (Anh et al., 2020; Anh et al., 2022; Gutiérrez et al., 2015). Trong bài báo gần đây của Han (2020), tác giả đã đề xuất một hàm vô

hướng phi tuyến, khi kết hợp với các giá trị compact của ánh xạ mục tiêu, sẽ mang lại biểu diễn vô hướng cho các nghiệm hữu hiệu gần đúng cho bài toán tối ưu tập liên quan đến quan hệ thứ tự dưới. Ở đây, chúng tôi sử dụng hàm vô hướng phi tuyến kết hợp với các giá trị đóng của ánh xạ mục tiêu để tạo ra biểu diễn vô hướng của các nghiệm hữu hiệu gần đúng cho các bài toán tối ưu tập. Định lý 3.1 là cải tiến rõ ràng của Định lý 3.2 trong nghiên cứu của Han (2020) vì tính compact đã được thay thế bằng tính đóng.

Cho $\mathcal{P}$ là một tập con không rỗng trong Λ . Ta nghiên cứu tính liên tục Hausdorff của WEff trong Định lý sau.

Định lý 3.2 Cho $\mathcal{P}$ là một tập con khác rỗng của Λ . Giả sử rằng

- (i) $\mathcal{D}$ liên thông cung và compact;
- (ii) F là C -liên tục có giá trị C -đóng trong $\mathcal{D} \times \mathcal{P}$;
- (iii) với mỗi $p \in \mathcal{P}$, $F(\cdot, p)$ C -tựa lồi tự nhiên theo cung trong $\mathcal{D}$.

Khi đó, WEff là liên tục Hausdorff trong $]0, +\infty[\times \mathcal{P}$.

Chứng minh

Chứng minh được chia thành 5 bước.

Bước 1. W là usc trong $\mathcal{D} \times]0, +\infty[\times \mathcal{P}$.

Giả sử rằng W là không usc tại $(x_0, \varepsilon_0, p_0) \in \mathcal{D} \times]0, +\infty[\times \mathcal{P}$, khi đó tồn tại một lân cận $\mathcal{U}$ của $W(x_0, \varepsilon_0, p_0)$, một dãy $\{(x_n, \varepsilon_n, p_n)\}$ hội tụ về $(x_0, \varepsilon_0, p_0)$ thoả mãn

$$z_n \in W(x_n, \varepsilon_n, p_n) \setminus \mathcal{U} \quad \forall n.$$

Vì $\mathcal{D}$ là compact, ta giả sử rằng $\{z_n\}$ hội tụ về $z_0 \in \mathcal{D}$. Nếu $z_0 \notin W(x_0, \varepsilon_0, p_0)$, thì ta tìm được $\hat{z} \in \mathcal{D}$ thoả mãn

$$\zeta(z_0, x_0, p_0) > \zeta(\hat{z}, x_0, p_0) + \varepsilon_0.$$

Từ $z_n \in W(x_n, \varepsilon_n, p_n)$,

$$\zeta(z_n, x_n, p_n) \leq \zeta(\hat{z}, x_n, p_n) + \varepsilon_n. \quad (6)$$

Áp dụng Bổ đề 2.2, ζ liên tục trong $\mathcal{D} \times \mathcal{P}$, điều này kết hợp với (6) suy ra

$$\zeta(z_0, x_0, p_0) \leq \zeta(\hat{z}, x_0, p_0) + \varepsilon_0.$$

Điều này mâu thuẫn với

$$\zeta(z_0, x_0, p_0) > \zeta(\hat{z}, x_0, p_0) + \varepsilon_0,$$

và do đó $z_0 \in W(x_0, \varepsilon_0, p_0) \subset \mathcal{U}$. Điều này vô lý vì $\{z_n\} \not\subset \mathcal{U}$ và $\mathcal{U}$ là mở. Vì vậy, W là usc trong $\mathcal{D} \times]0, +\infty[\times \mathcal{P}$.

Bước 2. W là có giá trị compact trong $\mathcal{D} \times]0, +\infty[\times \mathcal{P}$.

Với mọi $\{z_n\} \subset W(x, \varepsilon, p)$ hội tụ về $z_0 \in \mathcal{D}$, ta có

$$\zeta(z_n, x, p) \leq \zeta(z, x, p) + \varepsilon \quad \forall z \in \mathcal{D}.$$

Áp dụng tính liên tục của ζ , ta được

$$\zeta(z_0, x, p) \leq \zeta(z, x, p) + \varepsilon \quad \forall z \in \mathcal{D},$$

và do đó $z_0 \in W(x, \varepsilon, p)$. Vì vậy, $W(x, \varepsilon, p)$ là compact.

Bước 3. WEff là usc trong $]0, +\infty[\times \mathcal{P}$.

Nếu có $(\varepsilon_0, p_0) \in]0, +\infty[\times \mathcal{P}$ sao cho WEff là không usc tại (ε_0, p_0) . Ta tìm được một lân cận $\mathcal{V}$ của WEff (ε_0, p_0) , một dãy $\{(\varepsilon_n, p_n)\}$ hội tụ về (ε_0, p_0) sao cho

$$x_n \in \text{WEff}(\varepsilon_n, p_n) \setminus \mathcal{V} \quad \forall n.$$

Khi đó, $x_n \in \bigcup_{x \in \mathcal{D}} W(x, \varepsilon_n, p_n)$, tức là, tìm được $z_n \in \mathcal{D}$ sao cho $x_n \in W(z_n, \varepsilon_n, p_n)$. Vì tính compact của $\mathcal{D}$,

$\{z_n\} \rightarrow z_0 \in \mathcal{D}$. Vì W là usc có giá trị compact tại $(z_0, \varepsilon_0, p_0)$, $x_n \in W(z_n, \varepsilon_n, p_n)$, ta tìm được một điểm tụ $x_0 \in W(z_0, \varepsilon_0, p_0)$ của $\{x_n\}$. Điều này kéo theo

$$x_0 \in \text{WEff}(\varepsilon_0, p_0) \subset \mathcal{V},$$

là vô lý vì x_n không thuộc $\mathcal{V}$ với mọi n . Vì vậy, WEff là usc trong $]0, +\infty[\times \mathcal{P}$.

Bước 4. Với mọi $x \in \mathcal{D}$, thì $E(x, \cdot, \cdot)$ là lsc trong $]0, +\infty[\times \mathcal{P}$.

Giả sử rằng $E(\hat{x}, \cdot, \cdot)$ là không lsc tại $(\varepsilon_0, p_0) \in]0, +\infty[\times \mathcal{P}$ với $\hat{x} \in \mathcal{D}$. Khi đó, ta tìm được $z_0 \in E(\hat{x}, \varepsilon_0, p_0)$ và $\{(\varepsilon_n, p_n)\}$ hội tụ về (ε_0, p_0) sao cho với mọi $z_n \in E(\hat{x}, \varepsilon_n, p_n)$, dãy $\{z_n\}$ không hội tụ về z_0 . Tức là, ta tìm được một dãy con $\{(\varepsilon_{n_k}, p_{n_k})\}$ của (ε_n, p_n) thỏa mãn $z_0 \notin E(\hat{x}, \varepsilon_{n_k}, p_{n_k})$ với mọi n_k , và tìm được $\hat{z}_{n_k} \in \mathcal{D}$ thỏa mãn

$$\zeta(z_0, \hat{x}, p_{n_k}) \geq (\hat{z}_{n_k}, \hat{x}, p_{n_k}) + \varepsilon_{n_k} \quad \forall n_k. \quad (7)$$

Từ tính compact của $\mathcal{D}$, ta giả sử rằng $\{\hat{z}_{n_k}\}$ hội tụ về $\hat{z} \in \mathcal{D}$. Khi đó, từ (7) và tính liên tục của ζ , ta được

$$\zeta(z_0, \hat{x}, p_0) \geq \zeta(\hat{z}, \hat{x}, p_0) + \varepsilon_0,$$

điều này mâu thuẫn $z_0 \in E(\hat{x}, \varepsilon_0, p_0)$. Do đó, $E(x, \cdot, \cdot)$ là lsc trong $]0, +\infty[\times \mathcal{P}$ với mọi $x \in \mathcal{D}$.

Bước 5. WEff là Hlsc trong $]0, +\infty[\times \mathcal{P}$.

Với mỗi $x \in \mathcal{D}$, $x_0 \in W(x, \varepsilon, p)$ và $\bar{x} \in E(x, \varepsilon, p)$ tùy ý. Khi đó, ta được với mọi $z \in \mathcal{D}$,

$$\begin{aligned} \zeta(x_0, x, p) &\leq \zeta(z, x, p) + \\ \varepsilon \text{ và } \zeta(\bar{x}, x, p) &< \zeta(z, x, p) + \varepsilon. \end{aligned} \quad (8)$$

Vì F là C -tựa lồi tự nhiên theo cung trong $\mathcal{D}$, Bổ đề 2.3 cho phép ta tìm được

một cung $\Gamma_{x_0, \bar{x}} \subset \mathcal{D}$ sao cho với mỗi $t \in]0, 1[$, ta tìm được $s \in [0, 1]$ thỏa mãn

$$\begin{aligned} \zeta(\Gamma_{x_0, \bar{x}}(t), x, p) &\leq (1-s)\zeta(x_0, x, p) \\ &+ s\zeta(\bar{x}, x, p). \end{aligned}$$

Điều này kết hợp với (8) suy ra

$$\zeta(\Gamma_{x_0, \bar{x}}(t), x, p) < \zeta(z, x, p) + \varepsilon \quad \forall z \in \mathcal{D}, t \in]0, 1[,$$

và do đó $\Gamma_{x_0, \bar{x}}(t) \in E(x, \varepsilon, p)$. Cho $t \rightarrow 0$, ta được

$$\Gamma_{x_0, \bar{x}}(t) \rightarrow x_0 \in \text{cl } E(x, \varepsilon, p),$$

và vì vậy

$$W(x, \varepsilon, p) \subset \text{cl } E(x, \varepsilon, p),$$

Kết hợp điều này với Bước 3, ta được

$$\begin{aligned} W(x, \varepsilon, p) \subset \text{cl } E(x, \varepsilon, p) &\subset \liminf_{(\varepsilon, p) \rightarrow (\varepsilon_0, p_0)} E(x, \varepsilon, p) \\ &\subset \liminf_{(\varepsilon, p) \rightarrow (\varepsilon_0, p_0)} W(x, \varepsilon, p). \end{aligned}$$

Vậy $W(x, \cdot, \cdot)$ là lsc trong $]0, +\infty[\times \mathcal{P}$. Kết hợp điều này với Định lý 3.1, ta kết luận rằng WEff là Hlsc trong $]0, +\infty[\times \mathcal{P}$.

Ví dụ 3.2 Cho $\mathbb{X} = \mathbb{Y} = \mathbb{R}^2$, $\Lambda = \mathbb{R}$, $C = \mathbb{R}_+^2$, $\mathcal{P} = [-1, 1]$, $\mathcal{D} = \mathcal{B}_{\mathbb{Y}} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 1\}$, và

$$\begin{aligned} F(x, p) &= \pi^p((x_1 x_2)^2, \|x\|) + \mathcal{B}_{\mathbb{Y}} \quad \forall x \\ &= (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Khi đó, các giả thiết (i) và (ii) của Định lý 3.2 thỏa mãn. Hơn nữa, với $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ và $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \in \mathcal{D}$, ta xét cung $\Gamma_{\bar{x}, \tilde{x}} : [0, 1] \rightarrow \mathcal{D}$ được xác định bởi:

$$\Gamma_{\bar{x}, \tilde{x}}(t) = \begin{cases} (1-2t)\bar{x}, & \text{if } 0 \leq t \leq 0.5 \\ (2t-1)\tilde{x}, & \text{if } 0.5 < t \leq 1 \end{cases}$$

Khi đó, với mỗi $t \in [0, 1]$, $F(\Gamma_{\bar{x}, \tilde{x}}(t), p) \leq (1-s)F(\bar{x}, p) + sF(\tilde{x}, p)$, trong đó

$s = \begin{cases} 0, & \text{nếu } 0 \leq t \leq 0.5 \\ 1, & \text{nếu } 0.5 < t \leq 1 \end{cases}$. Vì vậy, từ Định lý 3.2, Eff là liên tục Hausdorff trong $]0, +\infty[\times \mathcal{P}$.

Nhận xét 3.2 Cho đến nay, hầu hết các nghiên cứu về điều kiện nửa liên tục của ánh xạ nghiệm cho bài toán tối tập chứa tham số đều chủ yếu dựa trên các giả thiết liên quan đến điều kiện lồi (Xu and Li, 2016; Khoshkhabar, 2018; Anh et al., 2020), điều kiện đơn điệu (Sun, 2020; Liu et al., 2021), điều kiện trên và điều kiện trên ngược (Wenyan and Goulin, 2022; Xu and Li, 2014). Trong nghiên cứu này, điều kiện tựa lồi tự nhiên liên thông theo cung được chọn để thay thế các điều kiện đã đề cập trên trong việc nghiên cứu tính chất liên tục Hausdorff của các ánh xạ

nghiệm hữu hiệu, và do đó kết quả và cách tiếp cận của Định lý 3.2 là mới và khác với các kết quả hiện có.

4. KẾT LUẬN

Các điều kiện về tính ổn định theo nghĩa liên tục Hausdorff của ánh xạ nghiệm xấp xỉ cho bài toán tối ưu phụ thuộc tham số trong không gian định chuẩn đã được nghiên cứu. Sử dụng hàm Gerstewitz mở rộng và các tính chất tựa lồi tự nhiên theo cung, các điều kiện đủ để đảm bảo tính liên tục Hausdorff của ánh xạ nghiệm xấp xỉ cho bài toán này đã được thiết lập. Phương pháp được trình bày trong bài báo có thể áp dụng để nghiên cứu các vấn đề liên quan đến tối ưu, như các bài toán về quan hệ biến phân và bài toán bao hàm biến phân.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Anh L.Q., Duoc P.T., Tam T.N., 2020. On the stability of approximate solutionsto set-valued equilibrium problems, *Optimization*, 69, 1583-1599.

Anh L.Q., Anh N.T., Anh, Duoc P.T., Khanh L.T.V., Thu P.T.A., 2022. The connectedness of weakly and strongly efficient solution sets of nonconvex vector equilibrium problems. *Applied Set-Valued Analysis and Optimization*, 4 (1), 109-127.

Anh, L.Q., Duoc, P.T., Duong, T.T.T., 2023. A new scalarization approach and applications in set optimization. *Optimization*, 72(4), 1093-1117.

Avriel M., Zang I., 1980. Generalized arcwise-connected functions and characterizations of local-global minimum properties. *Journal of*

Optimization Theory and Applications, 32 (4), 407-425.

Gopfert A., Riahi H., Tammer C., Zalinescu C., 2003. *Variational methods in partially ordered spaces*, Springer, Berlin, pp. 24-26.

Gutiérrez C., Miglierina E., Molho E., Novo V., 2016. Convergence of solutions of a set optimization problem in the image space. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 170 (2), 358-371.

Gutiérrez C., Jiménez B., Novo V., 2015. Nonlinear scalarizations of set optimization problems with set orderings. In *Set Optimization and Applications-The State of the Art: From Set Relations to Set-Valued Risk Measures* (pp. 43-63). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.

- Han Y., 2020. Connectedness of weak minimal solution set for set optimization problems. *Operations Research Letters*, 48 (6), 820-826.
- Han Y., 2022. Connectedness of the approximate solution sets for set optimization problems. *Optimization*, 71 (16), 4819-4834.
- Han Y., Wang S.H., Huang N.J., 2019. Arcwise connectedness of the solution sets for set optimization problems, *Operations Research Letters*, 47 (3), 168-172.
- Huerga L., Jiménez B., Novo V., Vílchez A., 2021. Six set scalarizations based on the oriented distance: continuity, convexity and application to convex set optimization. *Mathematical Methods of Operations Research*, 93 (2), 413-436.
- Jahn J., Ha T.X.D., 2011. New order relations in set optimization, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 148 (2), 209-236.
- Jiménez B., Novo V., Vílchez A., 2020. Six set scalarizations based on the oriented distance: properties and application to set optimization. *Optimization*, 69 (3), 437-470.
- Karuna C., Lalitha, 2019. External and internal stability in set optimization. *Optimization*, 68 (4), 833-852.
- Khan A.A., Tammer C., Zalinescu C., 2016. *Set-valued optimization*, Springer, Berlin, pp. 369-397.
- KhoshkhabarAmiranloo S., 2018. Stability of minimal solutions to parametric set optimization problems, *Applicable Analysis*. 97 (14), 2510-2522.
- KhoshkhabarAmiranloo S., 2022. Approximate weak minimal solutions of set-valued optimization problems. *Journal of the Operations Research Society of China*, 1-20.
- KhoshkhabarAmiranloo S., Khorram E., 2016. Scalar characterizations of cone-continuous set-valued maps, *Applicable Analysis*, 95 (12), 2750-2765.
- KhoshkhabarAmiranloo S., Khorram E., Soleimani-Damaneh M., 2017. Nonlinear scalarization functions and polar cone in set optimization, *Optimization Letters*, 11 (3), 521-535.
- Kreps D.M., 1979. A representation theorem for preference for flexibility. *Journal Of The Econometric Society*, 565-577.
- Kuroiwa D., 1997. Some Criteria in Set-Valued Optimization. *Nonlinear Analysis and Convex Analysis*, 985, 171-176.
- Liu P.P., Wei H.Z., Chen C.R., Li S.J., 2021. Continuity of solutions for parametric set optimization problems via scalarization methods, *Journal of the Operations Research Society of China*, 9 (1), 79-97.
- Luc D.T., 1989. *Theory of vector optimization. Lecture notes in Economics and Mathematical systems*, vol. 319, Springer, Berlin.
- Lohne A., 2011. *Vector optimization with infimum and supremum*, Springer, Berlin, pp. 130-137.
- Mao J.Y., Wang S.H., Han Y., 2019. The stability of the solution sets for set optimization problems via improvement sets. *Optimization*, 68 (11), 2171-2193.

Sun Y., 2020. Continuity of solution mappings for parametric set optimization problems under partial order relations, *Pure mathematics* 2, 10 (11), 631-644.

Wenyan H., Guolin Y., 2022. Scalarization and semicontinuity of approximate solutions to set optimization problems, *Applied Set-Valued Analysis and Optimization*, 4, 239-250.

Xu Y., Li S., 2014. Continuity of the solution set mappings to a parametric set optimization problem. *Optimization Letter*, 8 (8), 2315-2327.

Xu Y., Li S., 2016. On the solution continuity of parametric set optimization problems. *Mathematical Methods of Operations Research*, 84 (1), 223-237.

HAUSDORFF CONTINUITY OF WEAK EFFICIENCY MAPPING FOR PARAMETRIC SET OPTIMIZATION PROBLEMS

Pham Tran Anh Thu
Can Tho FPT high school
(Email: thupta9@fpt.edu.vn)

ABSTRACT

The objective was to study the continuity of the efficient solution maps of perturbed set optimization problems in normed spaces. The semicontinuous, continuous concepts and concepts related to the convexity of a set-valued map such as segmented $\mathcal{C}$ -convexity, naturally segmented $\mathcal{C}$ -quasiconvexity, arcwise connected $\mathcal{C}$ -convexity, naturally arcwise connected $\mathcal{C}$ -quasiconvexity were reviewed. Next, we consider generalized scalarization functions of Gerterwitz function and their properties, in which in which the continuity played an important role in our analysis. Based on the properties of the above scalarization functions, a scalar representations of the weakly efficient solution for the set optimization problem is built. Finally, employing properties of the nonlinear scalarization function with the compactness of constraining set and the $\mathcal{C}$ -continuity as well as naturally arcwise connected $\mathcal{C}$ -quasiconvexity assumptions on the objective map, we established sufficient conditions for continuity of the efficient solution maps to problems

Keywords: *Approximate solution, Hausdorff continuity, nonlinear scalarization, scalar representation, set optimization problem.*